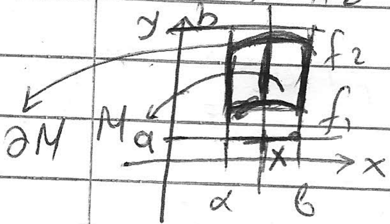
29/03/16.

Αποδ: (για την πιο απλή περίπτωση):

$\boxed{n=1}$ $B=[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$, f_1, f_2 συνεχείς, $f_1, f_2:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και $f_1\le f_2$. Θέλω νδο $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[\alpha,\beta] \wedge f_1(x)\le y\le f_2(x)\}$



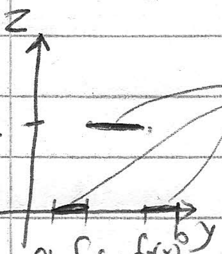
είναι J-μετρ., δηλ) φραγμένο (ισχύει αφού $x\in[\alpha,\beta]$ $a\le(\inf f_1\le f_1(x)\le)\, y\, (\le f_2(x)\le \sup f_2)\le b$) και η ∂M μηδενικού περιεχομένου (ισχύει, αφού $\partial M=\{\alpha\}\times[f_1(\alpha),f_2(\alpha)]\cup\{\beta\}\times[f_1(\beta),f_2(\beta)]\cup$ $\cup\Gamma_{f_1}\cup\Gamma_{f_2}$, όπου $\Gamma_{f_1}=\{(x,y): x\in[\alpha,\beta],\ y=f_1(x)\}$ αποτελείται από τμήματα που έχουν όλα $(n+1)=2$-διάστατο περιεχόμενο μηδέν) $\Rightarrow$ M J-μετρήσιμο $\Rightarrow \exists\, v(M)=\int_M 1 \left(=\int_M 1\, d(x,y)\right)=$

$$=\int_{[\alpha,\beta]\times[a,b]} \underbrace{\chi_M(x,y)}_{=\begin{cases}1, & (x,y)\in M\\ 0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus M\end{cases}} d(x,y),$$ όπου $\forall x\in[\alpha,\beta]$:

$$\chi_M(x,y)=\begin{cases}1, & f_1(x)\le y\le f_2(y)\\ 0, & y>f_2(x) \text{ ή } y<f_1(x)\end{cases}$$

$\longrightarrow$

και $\displaystyle\int_\alpha^b \chi_M(x,y)\,dy = \underbrace{\int_\alpha^{f_1(x)} \chi_M(x,y)\,dy}_{=0} + \boxed{\underbrace{\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \chi_M(x,y)\,dy}_{=1}} + \underbrace{\int_{f_2(x)}^{b} \chi_M(x,y)\,dy}_{=0}$



$$\xrightarrow{\text{Fubini}} v(M) = \int_\alpha^\beta \Big(\overbrace{\int_\alpha^b \chi_M(x,y)\,dy}^{f_2(x)-f_1(x)}\Big)dx =$$

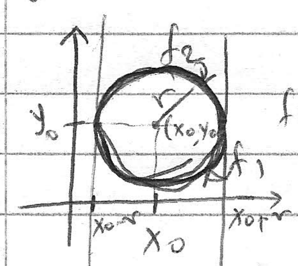
$$= \int_\alpha^\beta \big(f_2(x)-f_1(x)\big)dx = \int_{[\alpha,\beta]} \big(f_2(x)-f_1(x)\big)dx = \int_B (f_2-f_1)$$

<u>Παράδειγμα</u>: Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le r^2\}$

<u>Λύση</u>: $M = \Delta \ni (x,y) \Leftrightarrow (y-y_0)^2 \le r^2 - (x-x_0)^2 \Leftrightarrow |y-y_0| \le \sqrt{r^2-(x-x_0)^2}$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{r^2-(x-x_0)^2} \le y - y_0 \le \sqrt{r^2-(x-x_0)^2} \Leftrightarrow$$

$$f_1(x) \Leftrightarrow \boxed{y_0 - \sqrt{r^2-(x-x_0)^2}} \le y \le \boxed{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2} + y_0} \to f_2(x)$$



<u>αν-ν</u>: $(x-x_0)^2 \le r^2 \Leftrightarrow |x-x_0| \le r \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -r \le x - x_0 \le r \Leftrightarrow \boxed{x_0 - r \le x \le x_0 + r}$$

δηλ. $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \in [x_0-r, x_0+r]$ και $y_0 - \sqrt{r^2-(x-x_0)^2} \le y \le y_0 + \sqrt{r^2-(x-x_0)^2}\}$

όπου $[x_0-r, x_0+r]$ κλειστό κ' φραγμ. ($\Rightarrow$ συμπαγές)

και $f_1, f_2 : [x_0-r, x_0+r] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = y_0 - \sqrt{r^2-(x-x_0)^2}$, $f_2(x) = y_0 + \sqrt{r^2-(x-x_0)^2}$ συνεχείς $\Rightarrow$

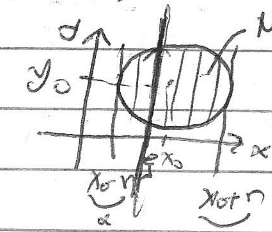
$\Rightarrow f_1, f_2$ ολ/μες (Κριτήριο Lebesgue, αφού f_1, f_2 φραγμένες ως συνεχείς <u>πάνω σε συμπαγές</u>) $\xRightarrow{\text{SOS 2}} v(M) = \int_B f_2 - f_1 =$

$$= \int_{[x_0-r,x_0+r]} \big(f_2(x)-f_1(x)\big)dx = 2\int_{x_0-r}^{x_0+r} \sqrt{r^2-(x-x_0)^2}\,dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-t^2}\,dt =$$

$$= 4\underbrace{\int_0^r \sqrt{r^2-t^2}\,dt}_{\frac{\pi}{4}r^2} = 4\cdot\frac{\pi}{4}r^2 = \pi r^2$$

(SOS 3) <u>Θεώρημα (Αρχή του Cavalieri)</u>: Έστω $M\subset\mathbb{R}^n$ J-μετρήσιμο και τέτοιο ώστε:

(α) M βρίσκεται μεταξύ των υπερεπιπέδων $x_1=\alpha$ και $x_1=b$, δηλ. $\forall \underbrace{(x_1,\dots,x_n)}_{\bar{x}}\in M$, είναι $x_1\in[\alpha,b]$



(β) $\forall \xi\in[\alpha,b]$, η τομή του υπερεπιπέδου $x_1=\xi$ με το M έχει το (n-1)-διάστατο περιεχόμενο $q(\xi)$.
Τότε η συνάρτηση $q:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει $v(M)=\int_\alpha^b q(\xi)\,d\xi$.

<u>Απόδειξη</u>: M J-μετρήσιμο $\Rightarrow M\subset[\alpha,b]\times A$, $A\subset\mathbb{R}^{n-1}$ κλειστό ορθογώνιο

$$\Rightarrow v(M) \underset{\text{ορ.}}{=} \int_M 1 \underset{\text{ορ.}}{=} \int_{[a,b]\times A} \chi_M(x_1,\bar{x}')\,d(x_1,\bar{x}'), \quad \bar{x}' = (x_2,\dots,x_n)$$

Από το (β) έχουμε ότι οι τομές $Q(\xi)=\{\bar{x}'\in\mathbb{R}^{n-1}:(\xi,\bar{x}')\in M\}$ είναι J-μετρήσιμα (αφού έχουν (n-1)διάστατο περιεχόμ.) και αφού $\forall\xi\in[\alpha,b]: \bar x'\in Q(\xi) \Leftrightarrow (\xi,\bar x')\in M\subset[\alpha,b]\times A \Rightarrow (\xi,\bar x')\in\{\xi\}\times A$ έχουμε $Q(\xi)\subset A$ και άρα $q(\xi)=v(Q(\xi)) =$

$$= \int_A \underbrace{\chi_{Q(\xi)}(\bar x')}_{=\begin{cases}1, & \bar x'\in Q(\xi)\\ 0, & \bar x'\notin Q(\xi)\end{cases} = \begin{cases}1, & (\xi,\bar x')\in M\\ 0, & -//- \notin M\end{cases} = \chi_M(\xi,\bar x')} d\bar x' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q(\xi)=\int \chi_M(\xi,\bar x')\,d\bar x' \xrightarrow[\text{Fubini}]{} \dots$$

<u>Άσκηση</u>: Υπολογίστε με την βοήθεια της αρχής του Cavalieri το περιεχόμενο του συνόλου $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le r^2\}$

[<u>Υπόδειξη</u>: Χρησιμοποιείστε το ότι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ακτίνας r είναι πr^2]